

DOI: 10.16285/j.rsm.2021.2080

裂隙黄土边坡三维稳定性极限分析

朱学亮¹, 邵生俊^{1,2}, 沈晓钧³, 邵 帅⁴, 刘小康¹

(1. 西安理工大学 岩土工程研究所 陕西 西安 710048; 2. 西安理工大学 陕西省黄土力学与工程重点实验室, 陕西 西安 710048;
3. 陕西省引汉济渭工程建设有限公司, 陕西 西安 710000; 4. 西安理工大学 建筑与城市规划系, 陕西 西安 710048)

摘 要: 黄土边坡中竖直裂隙的发育往往会对边坡稳定产生影响。相对于平面应变机制, 建立三维破坏机制下边坡稳定性分析方法更能接近实际边坡失稳情况。基于塑性极限分析上限法, 考虑预先存在竖直裂隙的三维黄土边坡不同破坏机制(坡面破坏、坡脚破坏和坡底破坏), 建立能量平衡方程及其无量纲临界高度值 $\gamma H/c$ 表达式, 采用随机搜索法得到了临界高度的上限解。分析了约束宽度、边坡坡度、内摩擦角以及裂隙深度对三维竖直裂隙黄土边坡临界高度值的影响。结果表明: 对于坡脚破坏机制, 临界高度值随着裂隙深度的增加而减小, 减小至临界裂隙深度 $(\delta/H)_{\min}$ 后, 裂隙深度的增加不再影响临界高度值; 临界裂隙深度随着坡度 β 的增大而增大, 随着内摩擦角 φ 的增大而减小。当约束宽度 $B/H < 0.8$ 时, 大多数破坏机制为坡面破坏。当约束宽度 $B/H = 0.8$ 、内摩擦角 $\varphi = 10^\circ$ 及约束宽度 $B/H = 0.6$ 、内摩擦角 $\varphi = 15^\circ$ 时, 边坡的破坏从坡面破坏机制逐渐过渡到坡脚破坏机制。存在竖直裂隙的黄土边坡比完整边坡具有更小的临界高度, 约束宽度及内摩擦角会对三维黄土边坡破坏机制产生影响。

关 键 词: 边坡失稳; 竖直裂隙; 破坏机制; 上限法

中图分类号: TU 444

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2022) 10-2735-10

Three-dimensional stability limit analysis of cracked loess slopes

ZHU Xue-liang¹, SHAO Sheng-jun^{1,2}, SHEN Xiao-jun³, SHAO Shuai⁴, LIU Xiao-kang¹

(1. Institute of Geotechnical Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an, Shaanxi 710048, China; 2. Shaanxi Key Laboratory of Loess Mechanics and Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an, Shaanxi 710048, China; 3. Hanjiang to Weihe River Valley Water Diversion Project Construction Co., Ltd., Xi'an, Shaanxi 710000, China; 4. Department of Architecture and Urban Planning, Xi'an University of Technology, Xi'an, Shaanxi 710048, China)

Abstract: The development of vertical cracks in loess slopes often affects slope stability. Compared with the plane strain mechanism, the slope stability analysis under the three-dimensional (3D) failure mechanism is closer to the actual slope instability. Based on the upper bound method of plastic limit analysis, different failure mechanisms (face failure, toe failure and base failure) of 3D loess slope with pre-existing cracks are considered, the energy balance equation and its dimensionless critical height expression $\gamma H/c$ are established, and the upper bound solution of critical height is obtained by random search method. The effects of constraint width, slope angle, internal friction angle and crack depth on the critical height of 3D vertical cracked loess slopes are analyzed. The results indicate that for the toe failure mechanism, the critical height decreases with the increase of crack depth, and the increase in crack depth no longer affects the critical height after reducing to the critical crack depth $(\delta/H)_{\min}$. The critical crack depth increases with the increase of slope angle β and decreases with the increase of internal friction angle φ . When the constraint width $B/H < 0.8$, most of the failure mechanism is of face failure. When the constraint width $B/H = 0.8$, internal friction angle $\varphi = 10^\circ$, and the constraint width $B/H = 0.6$, internal friction angle $\varphi = 15^\circ$, the failure mechanism of the slope gradually transits from the face failure mechanism to the toe failure mechanism. The loess slope with vertical cracks has a smaller critical height than the intact slope. The constraint width and internal friction angle can affect the failure mechanism of 3D loess slopes.

Keywords: slope instability; vertical cracks; failure mechanism; upper bound method

收稿日期: 2021-12-09

修回日期: 2022-06-22

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 52108342); 陕西省自然科学基金基础研究计划-引汉济渭联合基金项目 (No. 2019JLP-21, No. 2019JLZ-13); 西安理工大学博士启动金 (No. 107-451122001); 陕西省水利科技计划项目 (No. 2021slkj-12)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (52108342), the Shaanxi Province Natural Science Foundation Research Program-Hanjiang-Weihe Joint Fund Project (2019JLP-21, 2019JLZ-13), the Ph.D. Launch Fund of Xi'an University of Technology (107-451122001) and the Shaanxi Water Science and Technology Program (2021slkj-12).

第一作者简介: 朱学亮, 男, 1996年生, 硕士研究生, 主要从事黄土力学及边坡稳定性极限分析等研究。E-mail: 3406313594@qq.com

通讯作者: 邵帅, 男, 1990年生, 博士, 讲师, 主要从事黄土力学方面的研究工作。E-mail: shaoshuai@xaut.edu.cn

1 引言

边坡稳定性问题是土力学经典的三大工程实际问题之一。过去已经有很多的学者对其进行了深入的研究,通常采用的边坡稳定性分析方法分为三类:极限平衡法、极限分析法以及数值分析法^[1]。极限平衡法是基于静力平衡的分析方法,理论基础简单且被广泛应用,但未能考虑到土体的应力-应变关系且需要假设的条件较多,使得与实际情况有较大区别。数值分析法(如有限元、离散元),虽然可以考虑不同类型的本构关系,但是存在建模繁琐和失稳依据难以判断的问题。极限分析法是基于塑性力学基础之上的一种方法,其可以考虑到土体塑性,通过上、下限定理建立平衡关系得到边坡稳定性问题的极限解。

黄土边坡坡顶通常都会发现裂隙,且裂隙的存在会导致边坡稳定性大大降低。通常情况下将边坡裂隙分为两类:一类为由于气候因素影响作用下产生的裂隙,坡顶裂隙发生在边坡破坏之前,称为“预先存在的裂隙”;另一类为边坡破坏过程中产生的裂隙,称为“形成过程中的裂隙”^[2]。Chen^[3]提出了平面应变下对数螺旋线破坏机制,并运用极限分析理论对岩土边坡稳定性问题进行了研究。Spencer^[4]研究了在圆弧滑动破坏机制中引入张力裂隙并推导出裂隙深度公式,得到了裂隙深度受土体重度、黏聚力以及内摩擦角的影响。Michalowski^[5]、Utili^[2]为了深入了解裂隙对边坡稳定性问题的影响,分别提出了基于极限分析理论框架下的含裂隙边坡的稳定性分析方法,得到了裂隙深度以及裂缝位置对边坡稳定性的影响,为之后含裂隙边坡的分析方法提供一定的参考。以往的研究大多数都是二维平面应变下的边坡稳定性研究,但是二维情况下的分析往往偏于保守。除此之外,可以观察到自然边坡破坏后具有一定的三维破坏特征以及裂隙的发育特征。因此,忽略边坡破坏的三维特征以及裂隙发育的影响,会导致边坡稳定性分析结果偏高。

Michalowski 等^[6]提出了土质边坡“号角形”三维破坏机制,之后 Gao 等^[7]在此基础上对三维边坡破坏模式(坡面破坏、坡底破坏)进行了拓展。He 等^[8]建立了裂隙边坡三维破坏机构,得出随着边坡宽度的增加,最危险的裂缝对边坡稳定性造成的影响明显降低。何毅等^[9]进一步考虑了坡顶倾角的裂隙边坡稳定性,得到随着坡顶倾角的增大,临界裂

隙深度将会逐渐增大且位置会越来越偏离坡肩。Li 等^[10]采用拟静力法考虑了地震作用下三维边坡的稳定性,得到地震响应将大大降低边坡的稳定性,这与我们的认知一致。饶平等^[11]采用蒙特卡洛模拟法和模式搜索法对不同破坏形式下裂缝边坡三维稳定性进行了分析,研究了裂缝对于边坡的影响。

由于关于裂隙边坡稳定性分析的文献很少,因此本文主要是基于极限分析上限法,结合陈祖煜院士提出的随机搜索法^[12],对已有裂隙在不同破坏形式下(坡面破坏、坡脚破坏、坡底破坏)的三维均质黄土边坡稳定性进行研究。

2 裂隙边坡旋转破坏机制

2.1 对数螺旋线破坏机构

边坡失稳破坏机制一般包括平动破坏机制(滑动面为平面)、转动破坏机制(滑动面为圆弧面)以及平动-转动破坏机制。对于一般假定的边坡滑动面,根据极限分析上限理论构造几何容许的运动场。Chen^[3]在专著中假定在极限状态下绕极点旋转的坡体滑动面,并且根据摩尔-库仑屈服准则和相关联流动法则提出了对数螺旋线破坏机构,Michalowski 等^[6]根据 Chen 的方法将二维转动破坏机制拓展为一种“号角形”的三维转动破坏机制,如图 1 所示。

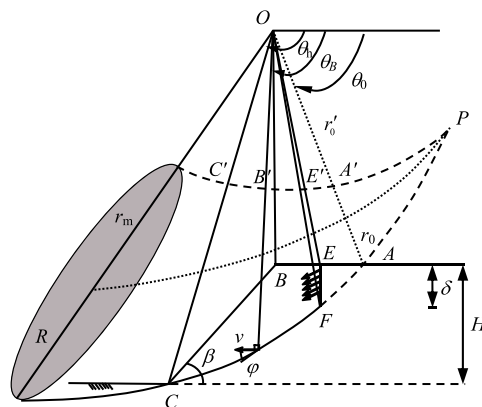


图 1 裂隙边坡三维旋转破坏机构

Fig.1 Three-dimensional rotational failure mechanism of cracked slopes

PAC 曲线方程为

$$r(\theta) = r_0 e^{(\theta - \theta_0) \tan \varphi} \quad (1)$$

PA'C' 曲线方程为

$$r'(\theta) = r'_0 e^{-(\theta - \theta_0) \tan \varphi} \quad (2)$$

式中: $r(\theta)$ 、 $r'(\theta)$ 为对数螺旋线上某一点到极点 O

的半径距离； θ 为水平参考线与所在半径直线的夹角； r_0 、 r'_0 分别为图 1 中的 OA 、 OA' ，是相当于角度 θ_0 的半径； φ 为土体的内摩擦角。

根据虚功原理可知，在所建立的任意运动许可的速度场（即破坏机制）中，满足外力所做的功率等于内能耗散的功率^[3]，即

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dV = \int_A T_i \dot{u}_i^* dA + \int_V F_i \dot{u}_i^* dV \quad (3)$$

式中： A 、 V 分别为整个积分对象区域上的面积和体积； T_i 为表面力； F_i 为体力； $\dot{u}_i^*$ 为运动许可的速度场； $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ 为运动许可的速度场中的应变率； σ_{ij} 为与应变率对应的应力张量。

2.2 三维裂隙边坡破坏形式

对于黄土边坡已有的裂隙绝大多数都是沿竖直方向发展的，当发生破坏时边坡宽度受到约束，使得边坡表现出的三维效应较为明显^[13]。因此，对于三维裂隙黄土边坡稳定性分析方法的研究非常有必要。依据 Gao 等^[7]将土质边坡三维旋转破坏机制从坡脚破坏拓展到了坡面破坏和坡底破坏，类比其计算分析方法，本文将考虑存在竖直裂隙时三维黄土边坡不同破坏形式下的稳定性问题，分别为坡脚破坏、坡面破坏以及坡底破坏，如图 2 所示。

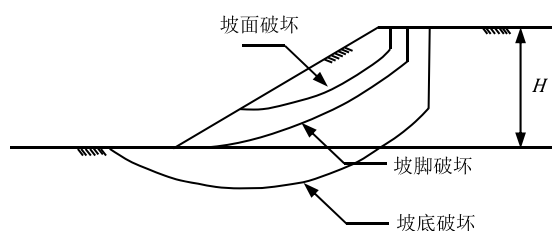


图 2 3 种裂隙边坡破坏模式

Fig.2 Three types of failure mechanism for cracked slopes

3 不同破坏形式下的平衡方程

本文基于极限分析运动学分析方法，开展不同破坏形式下含竖直裂隙的三维均质黄土边坡稳定性问题的研究。为了使三维破坏机制的宽度在趋近于无穷大时退化为平面应变下的对数螺旋线破坏机制，如图 3 所示，在对称面上加入一个单元体，该插入块的截面曲线是平面应变下的对数螺旋线，其宽度为 b ，形成由中间插入块和两个对称的曲面端组合的破坏机制。

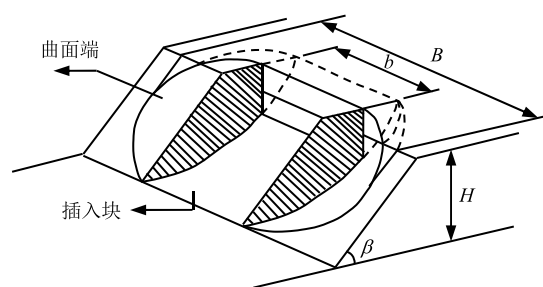
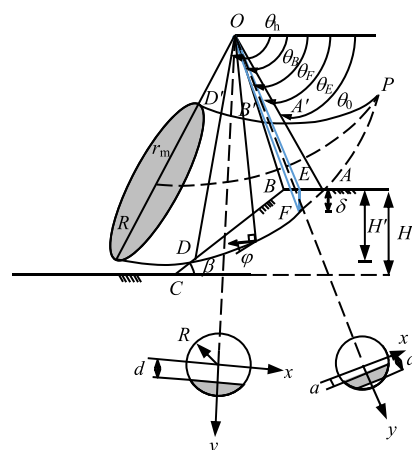


图 3 含裂隙的三维旋转破坏机制（带插入块）

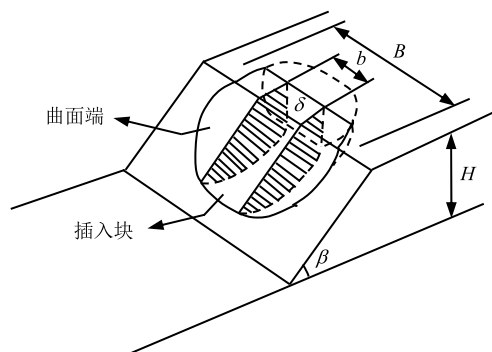
Fig.3 Three-dimensional rotational failure mechanism with crack (with plane insert)

3.1 坡面破坏机制

针对含裂隙的三维黄土边坡的破坏形式，三维坡面破坏机制（见图 4）与三维坡脚破坏机制（见图 1）非常相近，因此，类似于 Gao 等^[7]提出的方法引入 $n = H'/H$ ，当 $n=1$ 时，三维坡脚破坏机制是三维坡面破坏机制的特例。对于裂隙 EF 可引入 δ 来表示，其位置则由 θ_E 、 θ_F 角度来确定，如图 4 所示。



(a) “号角形”滑动面（坡面破坏）



(b) 三维滑动面（坡面破坏）

图 4 含裂隙的三维坡面破坏机制

Fig.4 Three-dimensional face failure mechanism with crack

Michalowski 等^[6]已经描述了“号角形”对数螺旋线三维破坏机制中的 R 、 r_m 以及边坡滑动面上任意一点的线速度 v ，本文不再赘述。根据极限分析上限定理，通过建立能量平衡方程得到极限分析的上限解。假定边坡滑动面以下土体保持静止，滑动块做刚性旋转。本文仅考虑滑动土体自重做功为外力做功功率，参考 Gao 等^[7]对三维边坡破坏形式的拓展研究给出土体自重做功 W_γ 和内能耗散功率 D 的计算方法，引入裂隙 δ 可以得到外力做功 W_γ 和内能耗散功率 D 的计算公式。 W_γ 和 D 的相关推导过程及计算原理详见文献^[6]。

整个边坡滑动部分包括中间插入块 b 和两端的曲面部分，在计算过程中需要分别计算。

曲面部分土体自重功率 W_γ^{curve} 为

$$W_\gamma^{\text{curve}} = W_\gamma^{FB} + W_\gamma^{BD} + W_\gamma^{EF} \quad (4)$$

式中： W_γ^{FB} 和 W_γ^{BD} 推导过程详见文献^[7]； W_γ^{EF} 的表达式为

$$W_\gamma^{EF} = 2\omega\gamma \left[\int_{\theta_E}^{\theta_F} \int_0^{\sqrt{R^2-a^2}} \int_a^{\sqrt{R^2-x^2}} (r_m+y)^2 \cos\theta dy dx d\theta - \int_{\theta_E}^{\theta_F} \int_0^{\sqrt{R^2-a^2}} \int_{a^*}^{\sqrt{R^2-x^2}} (r_m+y)^2 \cos\theta dy dx d\theta \right] \quad (5)$$

中间插入块的计算部分可视为二维对数螺旋机构沿坡顶宽度方向的延伸，因此，乘以宽度 b 就是该部分的结果，利用虚功原理可推导出插入块自重功率 W_γ^{plane} 为

$$W_\gamma^{\text{plane}} = b\omega\gamma \left[\int_{\theta_F}^{\theta_B} \int_a^R (r_m+y)^2 \cos\theta dy d\theta + \int_{\theta_B}^{\theta_h} \int_d^R (r_m+y)^2 \cos\theta dy d\theta + \int_{\theta_E}^{\theta_F} \int_a^R (r_m+y)^2 \cos\theta dy d\theta - \int_{\theta_E}^{\theta_F} \int_{a^*}^R (r_m+y)^2 \cos\theta dy d\theta \right] \quad (6)$$

裂隙 δ 是预先已知存在的，不存在能量的耗散，所以仅将裂隙结构面视为滑动体除破坏面以外的表面，只需计算滑动体外表面（坡顶 EB 、坡面 BD 及裂隙面 EF ）上的能量耗散，具体推导过程见文献^[6]，对于内摩擦角 $\varphi > 0^\circ$ 的黄土边坡，曲面部分土体内能耗散率 D^{curve} 为

$$D^{\text{curve}} = D^{EB} + D^{BD} + D^{EF} \quad (7)$$

式中： D^{EB} 和 D^{BD} 推导过程详见文献^[7]； D^{EF} 的表达式为

$$D^{EF} = \frac{2c\omega r_0^2}{\tan\varphi} \left(\frac{\sin^2\theta_0}{\tan^2\theta_E} \int_{\theta_E}^{\theta_F} \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} \sqrt{R^2-a^{*2}} d\theta \right) \quad (8)$$

插入块部分内能耗散率 D^{plane} 为

$$D^{\text{plane}} = \frac{bc\omega r_0^2}{\tan\varphi} \left\{ (-\sin^2\theta_0) \int_{\theta_B}^{\theta_h} \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} d\theta e^{i\theta} + [-\sin^2(\beta+\theta_h)] e^{2(\theta_h-\theta_0)\tan\varphi} \int_{\theta_B}^{\theta_h} \frac{\cos(\theta+\beta)}{\sin^3(\theta+\beta)} d\theta + \left(\frac{\sin^2\theta_0}{\tan^2\theta_E} \right) \int_{\theta_E}^{\theta_F} \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} d\theta \right\} \quad (9)$$

式中： ω 为转动角速度； c 为土体黏聚力； φ 为土体内摩擦角； γ 为土体重度； β 为边坡坡度； R 为“号角形”破坏机制的平均半径； r_m 为两对数螺旋线的平均半径；变量 a 、 d 、 a^* 以及角度 θ_0 、 θ_B 、 θ_h 、 θ_F 、 θ_E 都可以从图 4 中的几何关系得出，具体为

$$a = \frac{r_0 \sin\theta_0}{\sin\theta} - r_m \quad (10)$$

$$d = \frac{\sin(\theta_h+\beta)}{\sin(\theta+\beta)} e^{(\theta_h-\theta_0)\tan\varphi} r_0 - r_m \quad (11)$$

$$a^* = \frac{\sin\theta_0}{\cos\theta \tan\theta_E} r_0 - r_m \quad (12)$$

$$\theta_B = \arctan \frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0 - A} \quad (13)$$

$$\theta_E = \arctan \frac{\sin\theta_0}{e^{(\theta_F-\theta_0)\tan\varphi} \cos\theta_F} \quad (14)$$

$$A = \frac{\sin(\theta_h-\theta_0)}{\sin\theta_h} - \frac{\sin(\theta_h+\beta)}{\sin\theta_h \sin\beta} \left[\sin\theta_h e^{(\theta_h-\theta_0)\tan\varphi} - \sin\theta_0 \right] \quad (15)$$

3.2 坡底破坏机制

对于含裂隙的三维黄土边坡坡底破坏机制，可以引入角度 β' 来确定滑动面，如图 5 所示。当 $\beta' = \beta$ 时，含裂隙的三维边坡坡脚破坏机制是三维坡底破坏机制的特例。对比坡面破坏机制，可以看出坡底破坏需要计算底部 CD 部分旋转所产生的耗散功率。按照 Gao 等^[7]提出的拓展三维边坡破坏机制的 W_γ 和 D 的计算方法，可以推导得到含裂隙的三维黄土边坡坡底破坏的 W_γ 和 D 的计算公式。

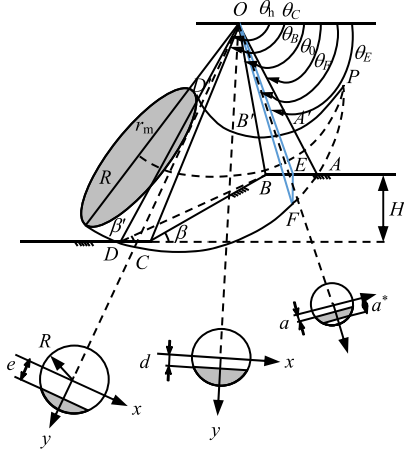
类似坡面破坏机制，可得曲面部分土体自重功率 W_γ^{curve} 为

$$W_\gamma^{\text{curve}} = W_\gamma^{FB} + W_\gamma^{BC} + W_\gamma^{CD} + W_\gamma^{EF} \quad (16)$$

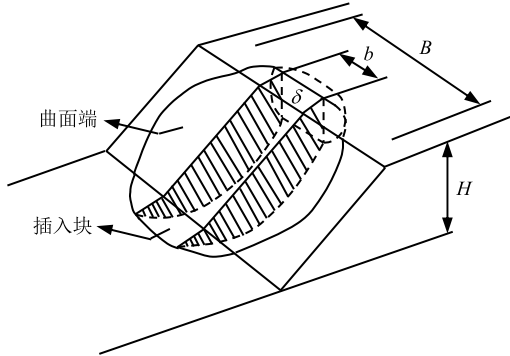
式中： W_γ^{FB} 、 W_γ^{BC} 和 W_γ^{CD} 推导过程详见文献^[7]； W_γ^{EF}

表达式为

$$W_{\gamma}^{EF} = 2\omega\gamma \left[\int_{\theta_E}^{\theta_F} \int_0^{\sqrt{R^2-a^2}} \int_a^{\sqrt{R^2-x^2}} (r_m+y)^2 \cos\theta dy dx d\theta - \int_{\theta_E}^{\theta_F} \int_0^{\sqrt{R^2-a^{*2}}} \int_{a^*}^{\sqrt{R^2-x^2}} (r_m+y)^2 \cos\theta dy dx d\theta \right] \quad (17)$$



(a) “号角形”滑动面（坡底破坏）



(b) 三维滑动面（坡底破坏）

图 5 含裂隙的三维坡底破坏机制

Fig.5 Three-dimensional base failure mechanism with crack

同理，插入块自重功率 $W_{\gamma}^{\text{plane}}$ 为

$$W_{\gamma}^{\text{plane}} = b\omega\gamma \left[\int_{\theta_B}^{\theta_C} \int_a^R (r_m+y)^2 \cos\theta dy d\theta + \int_{\theta_B}^{\theta_C} \int_d^R (r_m+y)^2 \cos\theta dy d\theta + \int_{\theta_C}^{\theta_h} \int_e^R (r_m+y)^2 \cos\theta dy d\theta + \int_{\theta_E}^{\theta_F} \int_a^R (r_m+y)^2 \cos\theta dy d\theta - \int_{\theta_E}^{\theta_F} \int_{a^*}^R (r_m+y)^2 \cos\theta dy d\theta \right] \quad (18)$$

同理，对于内摩擦角 $\varphi > 0^\circ$ 的黄土边坡，曲面部分土体内能耗散率 D^{curve} 为

$$D^{\text{curve}} = D^{EB} + D^{BC} + D^{CD} + D^{EF} \quad (19)$$

式中： D^{EB} 、 D^{BC} 和 D^{CD} 推导过程详见文献[7]； D^{EF} 的表达式为

$$D^{EF} = \frac{2c\omega r_0^2}{\tan\varphi} \left(\frac{\sin^2\theta_0}{\tan^2\theta_E} \int_{\theta_E}^{\theta_F} \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} \sqrt{R^2-a^{*2}} d\theta \right) \quad (20)$$

同理，插入块部分内能耗散率 D^{plane} 为

$$D^{\text{plane}} = \frac{bc\omega r_0^2}{\tan\varphi} \left\{ (-\sin^2\theta_0) \int_{\theta_E}^{\theta_B} \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} d\theta + \left[\frac{-\sin^2(\beta+\theta_C)\sin^2\theta_h}{\sin^2\theta_C} e^{2(\theta_h-\theta_0)\tan\varphi} \int_{\theta_B}^{\theta_C} \frac{\cos(\theta+\beta)}{\sin^3(\theta+\beta)} d\theta \right] + \left(-\sin^2\theta_h e^{2(\theta_h-\theta_0)\tan\varphi} \int_{\theta_C}^{\theta_h} \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} d\theta \right) + \left(\frac{\sin^2\theta_0}{\tan^2\theta_E} \int_{\theta_E}^{\theta_F} \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} d\theta \right) \right\} \quad (21)$$

式中：变量 a 、 a^* 以及角度 θ_E 与坡面破坏机制的表达式一致；变量 d 、 e 以及角度 θ_B 、 θ_C 可以从图 5 中的几何关系得出，具体为

$$d = \frac{\sin(\theta_C+\beta)\sin\theta_h}{\sin(\theta+\beta)\sin\theta_C} e^{(\theta_h-\theta_0)\tan\varphi} r_0 - r_m \quad (22)$$

$$e = \frac{\sin\theta_h}{\sin\theta} e^{(\theta_h-\theta_0)\tan\varphi} r_0 - r_m \quad (23)$$

$$\theta_B = \arctan \frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0 - A'} \quad (24)$$

$$\theta_C = \arctan \frac{\sin\theta_h e^{(\theta_h-\theta_0)\tan\varphi}}{\cos\theta_0 - A' - \frac{\sin\theta_h e^{(\theta_h-\theta_0)\tan\varphi} - \sin\theta_0}{\tan\beta}} \quad (25)$$

$$A' = \frac{\sin(\theta_h-\theta_0)}{\sin\theta_h} - \frac{\sin(\theta_h+\beta')}{\sin\theta_h \sin\beta'} \left[\sin\theta_h e^{(\theta_h-\theta_0)\tan\varphi} - \sin\theta_0 \right] \quad (26)$$

通过建立滑动块体曲面部分所做的自重功率 $W_{\gamma}^{\text{curve}}$ 、插入块体自重功率 $W_{\gamma}^{\text{plane}}$ 以及曲面部分所耗内能功率 D^{curve} 、插入块内能耗散率 D^{plane} 之间的能量平衡方程（式（27）），得到基于极限分析运动状态下的上限解。

$$W_{\gamma}^{\text{curve}} + W_{\gamma}^{\text{plane}} = D^{\text{curve}} + D^{\text{plane}} \quad (27)$$

4 程序优化与数值结果

基于极限分析方法构造的坡面破坏机制和坡底破坏机制建立能量平衡方程式（27），通过计算得到含裂隙的三维黄土边坡的无量纲临界高度 $\gamma H / c$

的表达式。临界高度 $\gamma H/c$ 是关于变量 θ_0 、 θ_h 、 θ_F 、 r'_0/r_0 以及 b/H 的函数。为了得到临界高度的上限解,需要对各个参数变量进行最优化计算得到最小值。由于对多个参数进行优化计算时会存在难度大且易陷入局部极小值的问题,所以本文采用陈祖煜院士提出的随机搜索法^[14]。该方法已在相关发表的研究论文中得到很好的验证,是一种非常有效的最优化搜索方法^[7, 15-16]。针对坡面破坏机制和坡底破坏机制推导的计算公式,采用 MATLAB 软件编写程序代码进行数值计算^[17-18]。为使边坡破坏机制符合几何边界条件,以上参数需满足一定的条件:

$$\left. \begin{aligned} 0 < \theta_0 < \theta_F < \theta_h < \pi \\ 0 < r'_0/r_0 < 1 \\ 0 < \frac{b}{H} < \frac{B}{H} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

对于各待优化参数,通过给定初始值、初始搜索步长以及精度要求,进行迭代计算得到临界高度 $\gamma H/c$ 的最小值。在优化程序编程过程中,设定角度的精度为 0.01° ,比值的精度为 0.001 。为了验证本文所推导的不同破坏形式下含裂隙的三维黄土边坡临界高度计算公式的正确性,可选取竖直边坡 ($\beta = 90^\circ$)、裂隙深度 $\delta = 0$ 和破坏机制中 $n=1$ 或 $\beta' = \beta$,得到临界高度 $\gamma H/c$ 的上限解。

由表 1 可以看出,本文推导的计算公式得到的临界高度值与 Gao^[7]、He^[8]等得到的值吻合较好。由于在编写程序时所采用的数值积分算法不同以及限制条件不同,临界高度值的结果有可能会产生一定的误差,但误差在可接受的范围之内。因此,对比结果说明本文所推导的裂隙黄土边坡三维稳定性破坏机制的理论计算公式是有效且可行的。

表 1 临界高度计算结果对比 (竖直边坡, $\delta=0$, $n=1$)
Table 1 Comparison of critical height (vertical slope, $\delta=0$, $n=1$)

$\varphi/(^\circ)$	B/H	$\theta_0/(^\circ)$	$\theta_h/(^\circ)$	r'_0/r_0	b/H	$\gamma H/c$			
						本文研究	Michalowski 等 ^[6]	Gao 等 ^[7]	He 等 ^[8]
15	1.5	23.23	59.48	0.546	0.527	6.735	7.124	6.783	6.772
15	5.0	31.95	61.23	0.579	3.846	5.457	5.504	5.456	5.456
30	0.8	16.06	60.15	0.707	0.100	12.668	14.368	12.263	12.260
30	3.0	38.61	66.30	0.607	1.881	7.645	7.974	7.632	7.630

根据本文所推导的公式,分别对不同坡角 β 和不同内摩擦角 φ 下存在最不利裂隙时的坡脚破坏的临界高度进行分析。如图 6 所示,得到临界高度 $\gamma H/c$ 关于不同裂隙深度 δ/H 的最小上限解,可以发现当约束宽度 B/H 从 0.8 到无穷大 (平面应变机制下) 的变化过程中,临界高度值表现出随着约束宽度的增大而减小的趋势;随着裂隙深度的增加,临界高度上限值逐渐减小,当裂隙深度到达一定值

时,临界高度值趋近于一固定不变值,即临界裂隙深度值 $(\delta/H)_{\min}$ 。通过对比图 6(a)、6(b)发现,临界裂隙深度值随着边坡坡度 β 的增大而增大;对比图 6(a)、6(c)发现,临界裂隙深度随着内摩擦角 φ 增大而减小。表明约束宽度、边坡坡度以及内摩擦角均对黄土边坡的临界裂隙深度存在一定的影响。约束宽度无穷大 (平面应变机制) 对比于约束宽度有限 (三维边坡) 表现出最小的临界高度值和临界裂

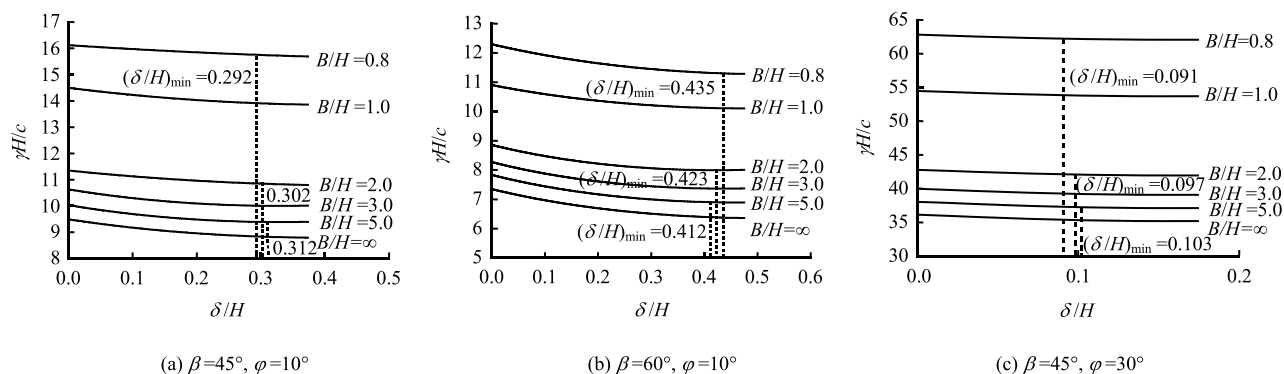


图 6 不同裂隙深度的边坡临界高度
Fig.6 Critical height of slopes with different crack depths

隙深度值,进一步表明了三维效应的影响。

对比表 2 和表 3 可知,预先存在裂隙的三维黄土边坡相较于完整边坡表现出更低的临界高度值,说明裂隙的存在会导致黄土边坡稳定性降低。由图 7 可知,预先存在裂隙的黄土边坡 ($\varphi > 0^\circ$) 多数情况下发生的是坡脚破坏机制。随着边坡坡度的增加,临界高度值逐渐减小。同一坡度下,临界高度值随着约束宽度 B/H 值的增大而减小,平面应变机制(二维)下到达最低。比较图 7(a)、7(b)可知,随着内摩擦角 φ 的增大,临界高度值幅度增大,表明内摩擦角 φ 的增大使得黄土边坡稳定性提高。当约束宽度较小时 ($B/H < 0.8$),裂隙黄土边坡破坏机制多为坡面破坏机制,其中在约束宽度 $B/H = 0.6$ 、 $B/H = 0.8$ 及内摩擦角 $\varphi = 15^\circ$ 、 $\varphi = 10^\circ$ 时,随着边坡坡度 β 不断增加,边坡破坏机制从坡面破坏逐渐

变为坡脚破坏机制。表明约束宽度 B/H 以及内摩擦角 φ 会对裂隙三维黄土边坡的破坏机制产生一定的影响。

分析表 2 可知,对于内摩擦角 $\varphi = 15^\circ$ 且边坡坡度 $\beta = 30^\circ$ 的黄土边坡,约束宽度较小 ($B/H = 0.5$ 、 0.6 、 0.8) 时,裂隙深度值基本接近于 0,且临界高度值与无裂隙边坡下的临界高度值相接近,因此,对于约束宽度 $B/H \leq 0.8$ 且 $\beta \leq 30^\circ$ 的三维裂隙黄土边坡,可近似忽略坡顶裂缝的存在。如图 8(a)、8(b)所示,在一定约束宽度值下,随着内摩擦角 φ 增大,裂隙深度逐渐减小,且裂隙位置逐渐接近坡肩;随着坡度 β 增大,裂隙深度逐渐增大,且裂隙位置逐渐远离坡肩,说明边坡坡度会影响到裂隙发育深度。

表 2 临界高度 $\gamma H/c$ 值 ($\varphi = 15^\circ$)
Table 2 Values of critical height $\gamma H/c$ ($\varphi = 15^\circ$)

B/H	文献来源	$\beta = 30^\circ$		$\beta = 45^\circ$		$\beta = 60^\circ$		$\beta = 75^\circ$	
		$\gamma H/c$	δ/H	$\gamma H/c$	δ/H	$\gamma H/c$	δ/H	$\gamma H/c$	δ/H
0.5	本文研究	73.340	0.099	33.240	0.199	23.783	0.323	18.264	0.495
	Gao 等 ^[7]	73.156	—	32.371	—	21.512	—	16.580	—
0.6	本文研究	61.438	0.079	26.857	0.209	17.642	0.313	12.013	0.585
	Gao 等 ^[7]	61.014	—	26.913	—	17.765	—	13.727	—
0.8	本文研究	46.032	0.073	20.012	0.222	13.857	0.337	10.548	0.428
	Gao 等 ^[7]	46.101	—	21.223	—	14.338	—	11.074	—
1.0	本文研究	39.131	0.119	18.519	0.227	12.374	0.270	9.391	0.497
	Gao 等 ^[7]	38.011	—	18.653	—	12.831	—	9.784	—
2.0	本文研究	27.789	0.126	14.146	0.233	9.667	0.364	6.475	0.383
	Gao 等 ^[7]	28.098	—	14.699	—	10.363	—	7.997	—
5.0	本文研究	23.347	0.113	12.257	0.257	8.363	0.334	6.220	0.521
	Gao 等 ^[7]	23.821	—	12.973	—	9.251	—	7.063	—

表 3 临界高度 $\gamma H/c$ 值 ($\varphi = 30^\circ$)
Table 3 Values of critical height $\gamma H/c$ ($\varphi = 30^\circ$)

B/H	文献来源	$\beta = 45^\circ$		$\beta = 60^\circ$		$\beta = 75^\circ$	
		$\gamma H/c$	δ/H	$\gamma H/c$	δ/H	$\gamma H/c$	δ/H
0.5	本文研究	97.004	0.059	40.765	0.157	25.147	0.348
	Gao 等 ^[7]	96.829	—	40.801	—	25.988	—
0.6	本文研究	72.747	0.122	33.674	0.180	20.807	0.364
	Gao 等 ^[7]	80.678	—	33.999	—	21.572	—
0.8	本文研究	61.873	0.092	26.822	0.208	16.242	0.400
	Gao 等 ^[7]	62.213	—	26.486	—	16.659	—
1.0	本文研究	54.042	0.109	23.212	0.224	14.266	0.453
	Gao 等 ^[7]	54.193	—	23.413	—	14.461	—
2.0	本文研究	42.133	0.098	18.018	0.215	11.486	0.444
	Gao 等 ^[7]	42.625	—	18.941	—	11.844	—
5.0	本文研究	37.480	0.099	16.362	0.241	9.461	0.419
	Gao 等 ^[7]	37.966	—	17.051	—	10.610	—

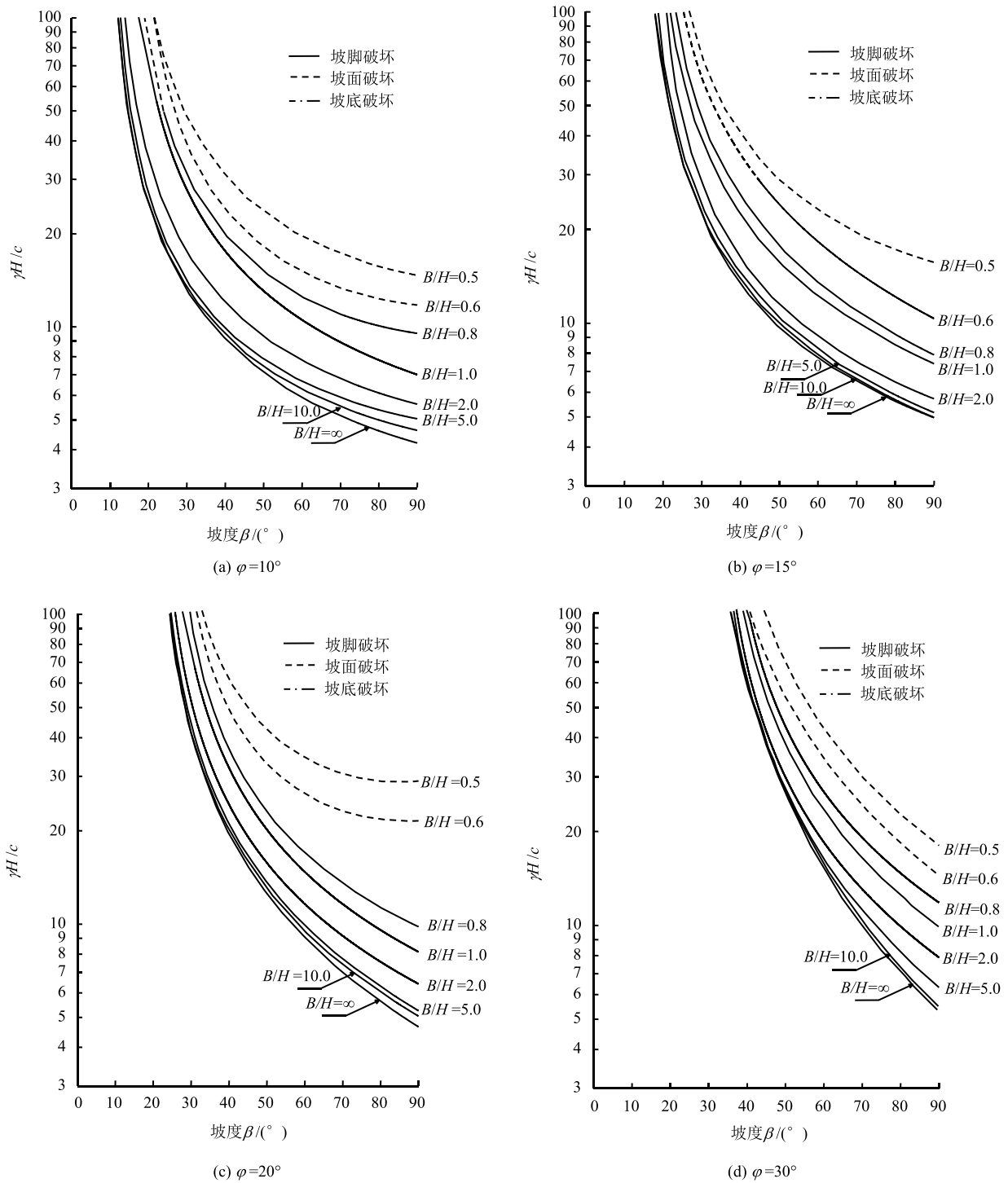


图7 不同约束宽度时的裂隙边坡临界高度值

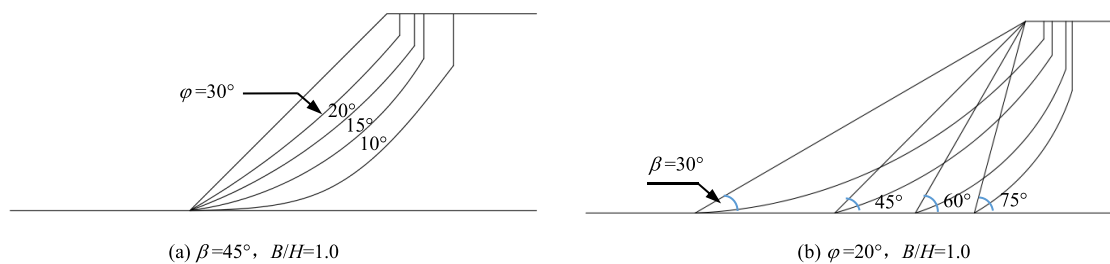
Fig.7 Critical height of cracked slopes with different values of B/H 

图8 三维效应下内摩擦角及边坡坡度对裂隙深度的影响

Fig.8 Effect of internal friction angle and slope angle on the crack depth under 3D condition

5 结 论

本文基于“号角形”三维转动破坏机制, 利用塑性极限分析上限法, 通过随机搜索法得到临界高度上限解, 对存在竖直裂隙的三维黄土边坡不同破坏机制下的稳定性问题进行分析, 得出结果如下:

(1) 引入一条预先存在的竖直裂隙 δ , 基于极限分析上限法, 建立能量平衡方程, 得到了三维裂隙黄土边坡不同破坏机制下的临界高度 $\gamma H / c$ 无量纲表达式, 对边坡稳定性进行了分析。

(2) 在坡脚破坏机制中, 随着约束宽度的增加, 临界高度将会减小。同一约束宽度 B / H 下, 临界高度降低至临界裂隙深度时不再变化, 说明裂隙深度大于临界裂隙深度时, 将不再影响临界高度值。临界裂隙深度 $(\delta / H)_{\min}$ 随着坡度 β 的增大而增大, 随着内摩擦角 φ 的增大而减小。

(3) 大多数三维裂隙黄土边坡破坏机制都是坡脚破坏机制。当约束宽度 $B / H < 0.8$ 时属于坡面破坏。内摩擦角较小时, 随着约束宽度的逐渐减小, 边坡破坏从坡面破坏机制逐渐过渡到坡脚破坏机制。可见约束宽度以及内摩擦角会影响到边坡破坏的机制。存在竖直裂隙的黄土边坡相对于完整边坡, 得到了更小的临界高度, 说明竖直裂隙的存在对黄土边坡稳定性具有一定的影响。

参 考 文 献

- [1] 陈祖煜. 土力学经典问题的极限分析上、下限解[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(1): 1-11.
CHEN Zu-yu. Limit analysis for the classic problems of soil mechanics[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2002, 24(1): 1-11.
- [2] UTILI S. Investigation by limit analysis on the stability of slopes with cracks[J]. **Géotechnique**, 2013, 63(2): 140-154.
- [3] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. Rotterdam, Netherlands: Elsevier, 1975.
- [4] SPENCER E. A method of analysis of the stability of embankments assuming parallel inter-slice forces[J]. **Géotechnique**, 1967, 17(1): 11-26.
- [5] MICHALOWSKI R L. Cracks in slopes: limit analysis approach to stability assessment[C]//GeoCongress 2012: State of the Art and Practice in Geotechnical Engineering. Oakland, California: ASCE, 2012: 442-450.
- [6] MICHALOWSKI R L, DRESCHER A. Three-dimensional stability of slopes and excavations[J]. **Geotechnique**, 2009, 59(10): 839-850.
- [7] GAO Y, ZHANG F, LEI G, et al. An extended limit analysis of three-dimensional slope stability[J]. **Géotechnique**, 2013, 63(6): 518-524.
- [8] HE Y, LIU Y, ZHANG Y B, et al. Stability assessment of three-dimensional slopes with cracks[J]. **Engineering Geology**, 2019, 252: 136-144.
- [9] 何毅, 余军炎, 袁冉, 等. 考虑坡顶倾角的土质裂隙边坡稳定性分析[J]. 中国公路学报, 2021, 34(5): 45-54.
HE Yi, YU Jun-yan, YUAN Ran, et al. Stability analysis of soil slope with cracks considering upper slope inclination angle[J]. **China Journal of Highway and Transport**, 2021, 34(5): 45-54.
- [10] LI Z, YANG X L, LI T. Static and seismic stability assessment of 3D slopes with cracks[J]. **Engineering Geology**, 2019, 265: 105450.
- [11] 饶平平, 吴健, 崔纪飞, 等. 裂缝边坡三维极限上限拓展分析[J]. 岩土工程学报, 2021, 43(9): 1612-1620.
RAO Ping-ping, WU Jian, CUI Ji-fei, et al. Extended three-dimensional analysis of cracked slopes using upper-bound limit analysis method[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2021, 43(9): 1612-1620.
- [12] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析: 原理·方法·程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003.
CHEN Zu-yu. Stability analysis of soil slope: principle, method and procedure[M]. Beijing: China Water & Power Press, 2003.
- [13] 周志军, 朱林植, 陈磊. 倾斜坡顶黄土边坡垂直裂隙深度计算方法[J]. 中国公路学报, 2021, 34(5): 37-44.
ZHOU Zhi-jun, ZHU Lin-xuan, CHEN Lei. Calculation method of vertical crack depth of loess slope with inclined crest[J]. **China Journal of Highway and Transport**, 2021, 34(5): 37-44.
- [14] CHEN Z Y. Random trials used in determining global minimum factors of safety of slopes[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1992, 29(2): 225-233.
- [15] 雷国辉, 张惠敏, 刘芳雪, 等. 成层软土地基上土堤填筑稳定性的塑性极限分析[J]. 岩土工程学报, 2018, 40(8): 1522-1527.
LEI Guo-hui, ZHANG Hui-min, LIU Fang-xue, et al. Plasticity limit analysis of stability of embankment fill on layered soft soil ground[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2018, 40(8): 1522-1527.